EUCLIDES

MAANDBLAD
VOOR DE DIDACTIEK VAN DE WISKUNDE

ORGAAN VAN
DE VERENIGINGEN WIMECOS EN LIWENAGEL
EN VAN DE WISKUNDE-WERKGROEP VAN DE W.V.O.

MET VASTE MEDEWERKING VAN VELE WISKUNDIGEN
IN BINNEN- EN BUITENLAND

43e JAARGANG 1967/1968

V — 1 FEBRUARI 1968

INHOUD

WOLTERS-NOORDHOFF NV — GRONINGEN

Het tijdschrift **Euclides** verschijnt in tien afleveringen per jaar. Prijs per jaargang *f* 8,75; voor hen die tevens geabonneerd zijn op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde is de prijs *f* 7,50.

De leden van *Wimecos* krijgen *Euclides* toegezonden als officieel orgaan van hun vereniging. De contributie bedraagt f 9,00 (abonnement inbegrepen), over te schrijven naar postrekening 143917, ten name van Wimecos, Amsterdam. Het verenigingsjaar begint op 1 sept.

De leden van *Liwenagel* krijgen *Euclides* toegezonden voorzover ze de wens daartoe te kennen geven aan de Penningmeester van Liwenagel te Heemstede; postrekening 87185.

Hetzelfde geldt voor de leden van de *Wiskunde-werkgroep van de W.V.O.* Zij kunnen zich wenden tot de penningmeester van de Wiskunde-werkgroep W.V.O. te Haarlem; postrekening 261036 te Voorburg.

Indien geen opzegging heeft plaatsgehad en bij het aangaan van het abonnement niets naders is bepaald omtrent de termijn, wordt aangenomen, dat men het abonnement continueert.

Boeken ter bespreking en aankondiging aan Dr. W. A. M. Burgers te Wassenaar.

Artikelen ter opname aan Dr. Joh. H. Wansink te Arnhem.

Opgaven voor de „kalender" in het volgend nummer binnen drie dagen na het verschijnen van dit nummer in te zenden aan Drs. A. M. Koldijk, Joh. de Wittlaan 14 te Hoogezand.

Aan de schrijvers van artikelen worden gratis 25 afdrukken verstrekt, in het vel gedrukt; voor meer afdrukken overlegge men met de uitgever.

COMPUTER EN WISKUNDE [1])

door

Prof. Dr. A. VAN DER SLUIS
Utrecht

1. De komst van de computer heeft de beoefening van verscheidene takken van wetenschap op revolutionaire wijze beïnvloed. Ten aanzien van de zuivere wiskunde is dit nauwelijks het geval. Wel heeft men de computer daarbij o.a. gebruikt om groepen en algebra's van zekere structuur te vinden; om groepkarakters uit te rekenen; om grote aantallen 10×10 grieks-latijnse vierkanten te construeren (Euler dacht dat er niet een bestond); en om bij het opkomen van een ad-hoc vermoeden snel een aantal gevallen door te rekenen alvorens moeizaam naar een bewijs te gaan zoeken. Maar ook de nieuwste ontwikkelingen in de zuivere wiskunde zijn zonder toedoen van de computer tot stand gekomen, en de beroemde vermoedens (Fermat, Riemann, Goldberg, vierkleurenprobleem) bestaan nog steeds.

2. In plaats van wiskundige problemen op te lossen heeft de computer veeleer nieuwe gesteld, en zo aanleiding gegeven tot de ontwikkeling van nieuwe mathematische disciplines en de opleving van oude. Voorts heeft de computer-gebruiker (vaak door schade en schande) een eigen visie ontwikkeld ten aanzien van de, vaak door de traditie geheiligde, voorraad conventionele wiskundige hulpmiddelen. In verband met het thema van de dag (computer en onderwijs) zal met name dit laatste onze aandacht hebben.

3. Een schoolvoorbeeld van een dergelijk hulpmiddel is de zgn. *abc*-formule voor de oplossing van een vierkantsvergelijking, een hulpmiddel waarmee ieder zich volkomen vertrouwd waant, maar waardoor men soms toch in de steek wordt gelaten. We beschouwen de volgende situatie.

Van een functie wenst men de nulwaarde benaderd te bepalen. De functiewaarden zijn bekend in een aantal punten in de buurt van 0. Hieruit blijkt dat de functie vrijwel lineair verloopt in deze

---

[1]) Lezing gehouden voor de winterbijeenkomst van het Wiskundig Genootschap op 3 januari 1967 te Haarlem.

De schrijver memoreert met grote erkentelijkheid de discussies met de heer J. R. Zweerus tijdens de voorbereiding van deze lezing.

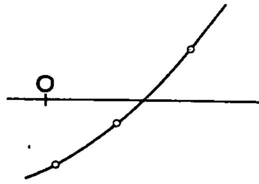


fig. 1.

omgeving, en dat de gevraagde nulwaarde ook daarin ligt (fig. 1). Weliswaar zou dus lineaire interpolatie al een heel aardig resultaat gegeven hebben, maar men wenst nog iets beter te doen, en bepaalt de kwadratische functie $ax^2 + bx + c$, die op drie der gegeven punten dezelfde waarden aanneemt als de gegeven functie. Nu heeft deze kwadratische functie weliswaar twee nulpunten, maar een daarvan is (wegens het bijna lineaire gedrag van f) absoluut zeer groot, zodat men de absoluut kleinste wenst te hebben. En nu gaat het mis. Immers, zijn α en β de wortels, $|\alpha| \ll |\beta|$, dan is $b^2 = a^2 . (\alpha + \beta)^2 \approx a^2\beta^2$, $4ac = 4a^2\alpha\beta$, dus $4ac \ll b^2$. Dus is $\sqrt{b^2 - 4ac} \approx b$ (we mogen zonder meer aannemen $b > 0$), zodat in $- b + \sqrt{(b^2 - 4ac)}$ aanzienlijk cijferverlies optreedt (dwz. men moet de vierkantswortel in veel meer cijfers nauwkeurig kennen dan men het uiteindelijk resultaat wenst). Dit cijferverlies treedt uiteraard niet op bij de bepaling van de absoluut grootste wortel, en hiermee is de remedie duidelijk: door de absoluut grootste wortel te delen op $\frac{c}{a}$ krijgt men de absoluut kleinste bevredigend. Dit resulteert in de formule

$$\frac{-2c}{b + \sqrt{b^2 - 4ac}} \text{ voor } b > 0 \text{ (of } \frac{-2c}{b\{1 + \sqrt{1 - 4ac/b^2}\}}$$

als men een formule wenst te hebben die, ongeacht het teken van b, altijd de absoluut kleinste wortel oplevert). Hierop dient men dan echter beslist niet vervolgens het op school geleerde voorschrift toe te passen dat wortels uit noemers dienen te worden verdreven, want dan krijgt men de oude formule weer terug. Dit geldt natuurlijk algemener voor uitdrukkingen van de gedaante $\frac{p}{\sqrt{q} + \sqrt{r}}$.

4. Een ander probleem, waarvoor de oplossingswijze traditioneel geheel vast staat, is dat van het bepalen van het maximum van een functie op een segment $[a, b]$: men stelt de afgeleide g van f op en lost op $g(x) = 0$.

We zullen nu eerst laten zien hoe men gedwongen wordt stap voor stap dit traditionele pad te verlaten (5 t/m 7) en ons daarna concentreren op een geheel ontraditionele aanpak.

5. Zij om te beginnen $g(x) = 0$ eens niet prettig oplosbaar. Dan kan men het numeriek proberen, bijv. met de methode van Newton (zie fig. 2), een inmiddels eigenlijk ook alweer traditioneel geworden aanpak: Uitgaande van een „geschikt" punt x_0 genereert men een rij $\{x_k\}$ als volgt: $x_{k+1} = x_k - g(x_k)/g'(x_k)$ (d.w.z. x_{k+1} is het snijpunt van de as met de raaklijn in het punt $(x_k, g(x_k))$ aan de grafiek). Als g en g' voldoende netjes zijn, convergeert de rij $\{x_k\}$ snel naar het nulpunt (deze methode toegepast op $g(x) = x^2 - a$ levert een bekend proces voor de benadering van $\sqrt{a}$).

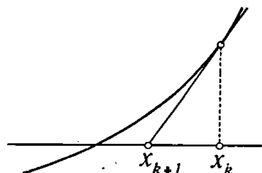


fig. 2.

Zodra echter de grafiek van g hobbeltjes vertoont komen de moeilijkheden.

6. Moeilijkheden komen er zeker als de afgeleide van g niet bestaat of niet te bepalen is, en men vraagt zich af of $g(x) = 0$ niet op te lossen is zonder g' te gebruiken. Zo'n methode zou trouwens ook van belang zijn voor de nogal eens voorkomende situatie, dat g' wel bestaat maar zich slechts ten koste van veel rekenwerk laat bepalen (de afgeleide van een functie pleegt nl. een veel ingewikkelder analytische gedaante te hebben dan de functie zelf).

Merkwaardigerwijze neemt men nu zijn toevlucht tot het in de analyse gewoonlijk slechts van theoretisch belang geachte proces van *successieve halvering*: zij g continu op $[a, b]$; zijn $g(a)$ en $g(b)$ van teken verschillend; zij m het midden van $[a, b]$; als $g(m)$ hetzelfde teken heeft als $g(a)$ vervang a door m en herhaal; als $g(m)$ hetzelfde teken heeft als $g(b)$ vervang b door m en herhaal. Op deze wijze kan men de wortel van $g(x) = 0$ willekeurig goed benaderen.

Ofschoon het successieve halveringsproces dus voor een duidelijk ruimere klasse van problemen bruikbaar is dan het Newtonproces, betekent dit allerminst dat dit laatste nu heeft afgedaan. Voor een groot aantal problemen werkt dit nl. aanzienlijk efficiënter. Evenzo treft men hiërarchieën van technieken aan om integralen te bereke-

nen, differentiaalvergelijkingen op te lossen etc. Steeds zullen sommige van die technieken slechts voor een vrij nauwe klasse van gevallen werken, maar dan erg efficiënt, andere minder efficiënt zijn maar algemener bruikbaar.

7. Mogelijk echter is reeds $g(=f')$ niet of slechts met veel moeite te berekenen, zodat de vraag rijst of we het maximum van f niet kunnen bepalen zonder gebruik te maken van f'. Hiermee zouden we dan het traditionele pad geheel verlaten hebben.

8. Onder een *eentoppige functie* verstaan we een niet noodzakelijk continue functie die voor $x \leqq x_0$ (x_0 een vast, bij de functie passend, getal) strikt stijgend is en voor $x \geqq x_0$ strikt dalend. De meeste in de praktijk voorkomende functies f voldoen in principe wel aan deze eis, althans op een geschikt interval. De moeilijkheid is echter dat men de functiewaarden vrijwel nooit exact in handen krijgt, bijv. tengevolge van afrondfouten (die men doorgaans al maakt zodra men de functiewaarden door een getal van een zeker aantal decimalen voorstelt, maar veel meer nog in de berekeningen

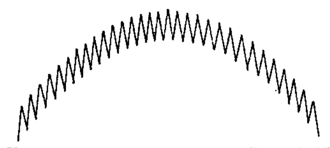


fig. 3.

die ons tot de functiewaarden voeren) en/of van waarnemingsonnauwkeurigheden (nl. als de functiewaarden door meting verkregen worden). Als men de verkregen functiewaarden grafisch uitzet komt er dan ook zo iets als fig. 3. Het is alsof er op de ware functie een soort ruisfunctie is gesuperponeerd, en de eentoppigheid is verloren gegaan.

Bij vrijwel alle numerieke processen heeft men met dergelijke ruisverschijnselen te maken, en vaak veroorzaken deze aanzienlijke complicaties. Dit is ook het geval bij de nu te bespreken processen ter bepaling van het maximum.

9. Zij f nu een op het interval $[a, b]$ eentoppige functie waarvan we het maximum wensen te bepalen, waarbij we er evenwel mee zullen rekening houden dat de opgeleverde functiewaarden met ruis belast zijn.

Neem nu y en z willekeurig in $[a, b]$ (zie fig. 4), $y < z$. Als $f(z) \geqq f(y)$ ligt het maximum op $[y, b]$, als $f(z) < f(y)$ ligt het op $[a, z]$;

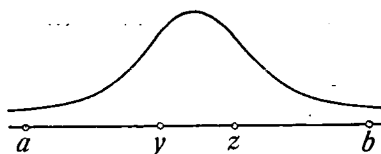


fig. 4.

herhaal het proces op dit kortere interval (de situatie $f(z) = f(y)$, waarbij we het interval zouden kunnen inkrimpen tot $[y, z]$, beschouwen we niet apart wegens het zeldzame voorkomen ervan). De vraag is nu uiteraard hoe y en z te kiezen zodat een zo klein mogelijk interval resulteert. Dit is kennelijk het geval voor y en z zo dicht mogelijk bij, en op gelijke afstanden ter weerszijden van het midden van $[a, b]$, dus $y = a + \frac{1}{2}(1 - \varepsilon)\ (b - a)$, $z = a + \frac{1}{2}\ (1 + \varepsilon)\ (b - a)$, ε zo klein mogelijk. Weliswaar kan een veel kleiner interval resulteren wanneer men bijv. y en z beide vlak bij b legt, maar dan moet men het geluk hebben dat $[y, b]$ uitgekozen moet worden; heeft men pech, dan resulteert het interval $[a, z]$, waarvan de lengte dan veel groter is dan $\frac{1}{2}(1 + \varepsilon)$ $(b - a)$. Het kleinste interval, waarvan men kan garanderen dat $[a, b]$ erop te reduceren is, ongeacht de ligging van het maximum, heeft derhalve de lengte $\frac{1}{2}(1 + \varepsilon)\ (b - a)$, en wordt bereikt voor de gegeven waarden van y en z; men noemt het zo ontstane proces *ε-halvering*.

Is er wel een positieve ondergrens voor ε? Meestal wel, nl. t.g.v. de ruis. Want door de ruis kan het gebeuren dat, voor y en z „dicht" bij elkaar, $f(y) > f(z)$ terwijl toch het maximum rechts van z ligt; in dat geval zou men dus met het verkeerde interval verder gaan, en het maximum geheel mislopen. Men mag dus bij ruis y en z inderdaad niet willekeurig dicht bij elkaar nemen. Helaas kent men deze ondergrens voor ε gewoonlijk niet, waardoor het proces moeilijk hanteerbaar wordt.

10. Nadere beschouwing van fig. 4 levert de gedachte op dat, als we y en z nu toch eens niet dicht bij het midden leggen, $[a, z]$ en $[y, b]$ wel wat langer worden, maar dat daarop dan ook al een functiewaarde bekend is in een punt *vrij ver van de rand*, zodat men met het berekenen van nog slechts één functiewaarde het interval alweer aanmerkelijk kan verkleinen. Men krijgt dan bijv. achtereenvolgens een rij intervallen $[a_i, b_i]$ zoals in fig. 5, waarin we de optredende abscissen aanduiden met $y_i\ z_i$ (zodat in het geval van fig. 5 $z_3 = y_2 = z_1 = y$, $b_2 = b_1 = z$ etc.), en waarin met een kruisje is aangeduid een absciswaarde waar f moet worden berekend.

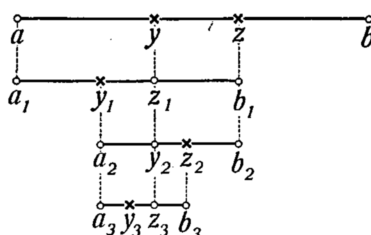


fig. 5.

11. Een prettig proces, zeker voor automatische verwerking, zou uiteraard ontstaan als elk volgend interval (zie fig. 5) met het erin gelegen overgeërfde punt een verkleinde *copie* was van zijn voorganger. Dan verkeert men nl. op een schaalfactor na (die evtl.

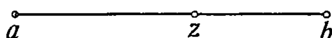


fig. 6.

negatief mag zijn) steeds in dezelfde situatie, zeg in de situatie van fig. 6, op het moment dat men een tweede punt zal kiezen. Dwz. dat in fig. 5

$$(z - a) : (b - a) = (z_1 - a_1) : (b_1 - a_1), \quad \text{dus}$$
$$(z - a) : (b - a) = (y - a) : (z - a). \qquad (1)$$

Als echter met $[y, b]$ had moeten worden verdergegaan, i.p.v. met $[a, z]$, hadden we analoog gekregen

$$(z - a) : (b - a) = (b - z) : (b - y).$$

Dus $(y - a) : (z - a) = (b - z) : (b - y)$, waaruit volgt

$$y - a = b - z \qquad (2)$$

(welke symmetrie men ook verwachten zou).
Dit invullen in (1) geeft

$$(z - a) : (b - a) = (b - z) : (z - a),$$

de evenredigheid voor de *gulden snede*. Dus

$$z - a = \tfrac{1}{2}(b - a)\ (-1 + \sqrt{5}) \approx 0{,}62\ (b - a)$$
$$y - a = \tfrac{1}{2}(b - a)\ (3 - \sqrt{5}) \approx 0{,}38\ (b - a)$$

12. Bij de guldensnede-methode wordt de lengte van het interval bij elke stap met $\sigma = \tfrac{1}{2}(-1 + \sqrt{5}) \approx 0{,}62$ vermenigvuldigd, zodat elk vijftal stappen de lengte van het interval ruwweg tot een fractie $\frac{1}{10}$ reduceert.

De factor 0,62 kan beduidend groter zijn dan de factor $\frac{1}{2}(1 + \varepsilon)$ bij ε-halvering, zodat men bij het guldensnedeproces mogelijk aanzienlijk meer stappen zal moeten uitvoeren om een bepaalde reductie van het interval te krijgen dan bij ε-halvering. Men zal derhalve zeggen dat het guldensnede-proces *in mathematische zin* langzamer convergeert dan ε-halvering. Evenwel hoeft men bij het guldensnede-proces voor elke stap (behalve voor de eerste) slechts één functiewaarde te berekenen tegen twee bij ε-halvering. Aangezien het aantal te berekenen functiewaarden vrijwel steeds (nl. behalve wanneer f zeer triviaal te berekenen is) bepalend is voor de rekentijd, kan men van het guldensnede-proces twee stappen doen in nagenoeg evenveel rekentijd als één bij ε-halvering. Men krijgt dan een reductie tot een fractie $\sigma^2 \approx 0,38$, hetgeen aanzienlijk kleiner is dan $\frac{1}{2}(1 + \varepsilon)$. *Naar rekentijd gemeten* convergeert het guldensnede proces dus juist sneller dan ε-halvering.

De opmerking moge triviaal zijn dat men bij praktische berekeningen, in plaats van te streven naar snelle mathematische convergentie (dus minimalisering van het aantal stappen), dient te streven naar snelle convergentie in de tijd (dus minimalisering van het produkt van aantal stappen en rekentijd per stap); een feit is evenwel dat vele beginners deze ondekking niet aanstonds doen.

13. In 9 constateerden we dat men i.v.m. ruis y en z niet te dicht bij elkaar mag nemen, op straffe van het verkeerde interval te kiezen. Alvorens ons af te vragen of het guldensnede-proces aan deze eis voldoet merken we op, dat men bij *elke* strategie om y_i en z_i te kiezen op den duur wel gedwongen zal zijn y_i en z_i te dicht bij elkaar te nemen, zodra nl. de lengte van het interval $[a_i, b_i]$ kleiner

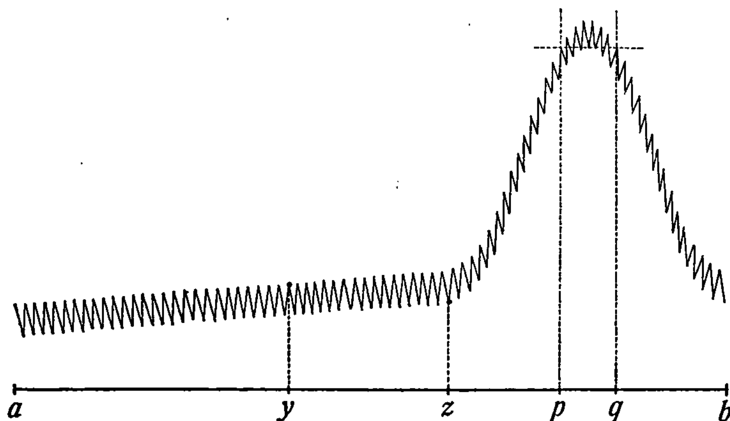


fig. 7.

dan ε (zie 9) geworden is. Op zichzelf is dit niet verontrustend. Immers is tengevolge van de ruis de ligging van het maximum niet meer eenduidig bepaald, en is er een heel interval, waarvan alle punten er in gelijke mate aanspraak op kunnen maken als abscis van het maximum te worden aangezien; men noemt dit wel het *onzekerheidsinterval* voor bedoelde abscis. (In fig. 7 is dat het interval $[p, q]$). Het beste wat men van een strategie mag verwachten is dat hij (in de zin van de ruis) y_i en z_i niet te dicht bij elkaar neemt voordat $[a_i, b_i]$ in lengte vergelijkbaar is met het onzekerheidsinterval. Helaas is een zodanige strategie niet bekend, en ook het guldensnede-proces presteert dit niet. Zo ziet men in fig. 7 een situatie uitgebeeld waarin het duidelijk mis gaat.

Tegen dit soort mislukkingen kan men zich op de in de wiskunde gebruikelijke wijze beschermen door het opleggen van extra voorwaarden aan f. Dit is hier zelfs heel eenvoudig. Theoretisch wordt het proces dan waterdicht. De lekkage bij de uitvoering van het proces houdt men echter, omdat men doorgaans niet in staat is te verifiëren of de extra voorwaarden wel vervuld zijn. Een analoge situatie treft men aan bij vrijwel alle praktische processen.

14. Eenmaal geraakt door de zin voor economie vraagt men zich vanzelf af wat in 9 nu de *beste* strategie is om de punten te bepalen waarin men f zal berekenen, d.w.z. de strategie die met een gegeven aantal (zeg n) te berekenen functiewaarden een zo sterk mogelijke reductie van het interval teweeg brengt. Deze vraag is in wezen dezelfde als de vraag naar de strategie die in staat is een interval van zo groot mogelijke lengte na berekening van n functiewaarden te reduceren op een interval ter lengte $\leqq 1$. Dat een dergelijke zo groot mogelijke lengte en een bijpassende strategie bestaan, kan men aantonen onder de conditie dat geen twee der te kiezen punten minder dan een positief getal ε van elkaar verschillen.

We zullen het langs klassieke lijnen der analyse verlopende bewijs (compactheids-argument) hier achterwege laten. De bedoelde zo groot mogelijke lengte zullen we met l_n aanduiden, de bijpassende strategie met S_n.

Zij nu $[a, b]$ (zie fig. 8) zo'n interval ter lengte l_n. Laten x_1 en x_2 ($x_1 > x_2$) de eerste twee der door S_n bepaalde punten zijn waar f moet worden geëvalueerd. Op $[a_1, b_1]$ $(=[a, x_1]$ of $[x_2, b])$ mogen nu, naast de overgeërfde functiewaarde, nog $n-2$ functiewaarden

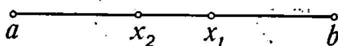


fig. 8.

worden bepaald. Dus $x_1 - a \leqq l_{n-1}$, $b - x_2 \leqq l_{n-1}$ (met het optreden van het $<$ teken moet serieus rekening worden gehouden omdat de overgeërfde abscis wel eens een andere zou kunnen zijn dan door S_{n-1} verlangd wordt).

In het geval $[a_1, b_1] = [x_2, b]$ zijn er voor x_3 twee mogelijkheden: $x_2 < x_3 < x_1$ of $x_1 < x_3 < b$; in het eerste geval zal, op grond van het zojuist afgeleide, $b - x_3 \leqq l_{n-2}$, in het tweede geval $b - x_1 \leqq l_{n-2}$, dus steeds $b - x_1 \leqq l_{n-2}$.

Wegens $b - a = x_1 - a + b - x_1$ geldt dan

$$l_n \leqq l_{n-1} + l_{n-2} \tag{3}$$

Voorts

$$l_1 = 1,\ l_2 = 2 - \varepsilon \tag{4}$$

De vraag is uiteraard of in (3) het gelijkteken te realiseren is; in dat geval zou, gezien de afleiding van (3), moeten gelden $b - x_2 = x_1 - a = l_{n-1}$, $b - x_1 = l_{n-2}$ en dus ook $x_2 - a = l_{n-2}$. We proberen het maar eens, en definiëren hiertoe een rij λ_k als volgt.

$$\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2 - \varepsilon \tag{5}$$

$$\lambda_k = \lambda_{k-1} + \lambda_{k-2} \tag{6}$$

We nemen een interval ter lengte λ_n, en leggen de deelpunten x_1 en x_2 op afstanden λ_{n-2} van de uiteinden (fig. 9). Dan is $x_1 - a = \lambda_n - \lambda_{n-2} = \lambda_{n-1}$ (zie (6)) en dus $x_1 - x_2 = \lambda_{n-1} - \lambda_{n-2} = \lambda_{n-3}$.

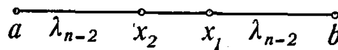


fig. 9.

Is nu $[a_1, b_1] = [a, x_1]$, dan is de lengte daarvan λ_{n-1}, en het overgeërfde punt x_2 ligt al op afstand λ_{n-3} van het uiteinde; het nog te kiezen deelpunt x_3 op afstand λ_{n-3} van het andere uiteinde leggen voert ons terug in de uitgangssituatie, zij het met alle indices 1 verlaagd. We kunnen het proces dus herhalen, en eindigen na het berekenen van n functiewaarden in de situatie van fig. 10, waaruit inderdaad een interval ter lengte 1, waarop het maximum wordt aangenomen, kan worden bepaald.

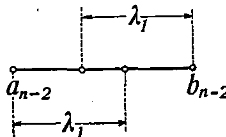


fig. 10.

Ook al is het optimale proces hiermee aangegeven, prettig is het niet, omdat de ε weer optreedt, en omdat men van tevoren n moet vastleggen. We vragen ons dan ook af hoeveel economischer dit proces zou zijn dan het zoveel prettiger guldensnede-proces.

15. Bij de beantwoording van deze vraag maken we kennis met een intrigerende getallenrij, die men in uiteenlopende gebieden van de wiskunde tegenkomt, nl. de *getallen van* Fibonacci, alsmede met het expliciet oplossen van een recursie relatie van een algemeen en veelvoorkomend type.

De getallen van Fibonacci F_k worden gedefinieerd door

$$F_0 = F_1 = 1, \; F_k = F_{k-1} + F_{k-2}, \; k \geqq 2.$$

Derhalve geldt $l_k < F_k$, voor elke ε. We trachten een expliciete uitdrukking voor de F_k te vinden. Oplossingen van de recursie

$$f_k = f_{k-1} + f_{k-2} \tag{7}$$

laten zich gemakkelijk aangeven: probeer maar $f_k = x^k$, dan moet $x^k = x^{k-1} + x^{k-2}$, dus $x^2 = x + 1$, dus, $x_{1,2} = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5})$ (iets dergelijks kan gedaan worden voor alle homogene lineaire recursie relaties met constante coëfficiënten). Nu is een lineaire combinatie van oplossingen van (7) weer een oplossing. Door nu c_1 en c_2 op te lossen uit $c_1 + c_2 = 1$, $c_1x_1 + c_2x_2 = 1$ krijgt men

$$F_k = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}\right]$$

Aangezien de eerste term tussen [] snel stijgt als k groeit, terwijl de tweede dan snel daalt, geldt

$$F_k \approx \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}.$$

Wegens $l_n < F_n$ kan een proces volgens 10, waarbij n functiewaarden mogen worden bepaald, dus nooit garanderen dat het oorspronkelijke interval tot een fractie $\leqq 1/F_n$ wordt gereduceerd. Anderzijds geeft de guldensnede-methode in dat geval een reductie tot een fractie $GS_n = \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}$. Wegens

$GS_n/F_n^{-1} \approx \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 \approx 1{,}17$ ziet men dat de guldensnede-methode welhaast optimaal genoemd mag worden, en uit $GS_{n+1}/F_n^{-1} \approx 0{,}62 \times 1{,}17 \approx 0{,}73$ blijkt dat de guldensnede-methode met $n + 1$ punten een sterkere reductie garandeert dan welk proces ook volgens 9 met n punten.

16. Terug naar het guldensnede-proces (zie 11). De meest voor de hand liggende uitvoering hiervan is wellicht als volgt (in het geval van fig. 11).

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= a + \sigma(b - a) \text{ met } \sigma = \tfrac{1}{2}(-1 + \sqrt{5}) \\ x_2 &= b - \sigma(b - a) \\ x_3 &= x_1 - \sigma(x_1 - a) \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

etc.

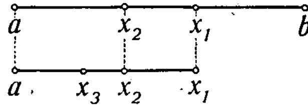


fig. 11.

Wie echter recht in de leer is in de theorie der gulden snede, dan wel zich (2) herinnert, zal zich het voortdurend vermenigvuldigen met σ als volgt besparen:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= a + \sigma(b - a) \\ x_2 &= a + b - x_1 \\ x_3 &= a + x_1 - x_2 \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

etc.

Dit theoretisch inzicht wordt echter niet beloond: wie het proces uitvoert volgens (9), ervaart dat het overgeërfde punt al spoedig helemaal niet meer in de buurt ligt van waar het zou behoren te liggen. Het komt zelfs in de verkeerde helft van het interval terecht, zodat elke referte aan het guldensnede-proces illusoir is. Met name kunnen hierdoor het overgeërfde en het met behulp daarvan bepaalde nieuwe punt wel willekeurig dicht bij elkaar komen. Had men dit kunnen voorzien?

Aangezien $\sigma = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{5})$ een irrationaal getal is, kan men bij het numeriek rekenen weinig anders doen dan $x_1 = a + \sigma_1(b - a)$ te nemen met σ_1 een goede benadering van σ. Definiëren we σ_2 door $x_2 = a + \sigma_2(x_1 - a)$, dan volgt wegens $x_2 = a + b - x_1$ dat $\sigma_2 = \dfrac{1}{\sigma_1} - 1$.

Analoog vinden we voor x_3 op $[a, x_2]$ $x_3 = a + \sigma_3(x_2 - a)$ met $\sigma_3 = \dfrac{1}{\sigma_2} - 1$ (en evenzo voor x_2 op $[x_3, x_1]$) etc.

De recursie $\sigma_{k+1} = \dfrac{1}{\sigma_k} - 1$ wordt fraai weergegeven in fig. 12.

Het getal σ wordt bij deze recursie gereproduceerd, en treedt dan

ook op als abscis van een snijpunt van de grafieken van $\frac{1}{x} - 1$ en x. Men ziet dat σ_k zich voor stijgende k wegspoedt van σ, om zich te begeven naar $\sigma' = -\frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$. De snelheid waarmee σ_k van σ wegloopt is eenvoudig te schatten door $\frac{1}{x} - 1$ in de omgeving van σ te *lineariseren*, d.w.z. te vervangen door de functie $\frac{1}{\sigma} - 1 - \frac{1}{\sigma^2}(x - \sigma)$, waarvan de grafiek een rechte is die in het punt $(\sigma, \frac{1}{\sigma} - 1)$ aan de grafiek van $\frac{1}{x} - 1$ raakt. Men ziet dan dat $\sigma_k - \sigma \approx -\frac{1}{\sigma^2}(\sigma_{k-1} - \sigma) \approx -2{,}6(\sigma_{k-1} - \sigma)$. Dus $\sigma_k - \sigma \approx (-2.6)^{k-1}(\sigma_1 - \sigma)$.

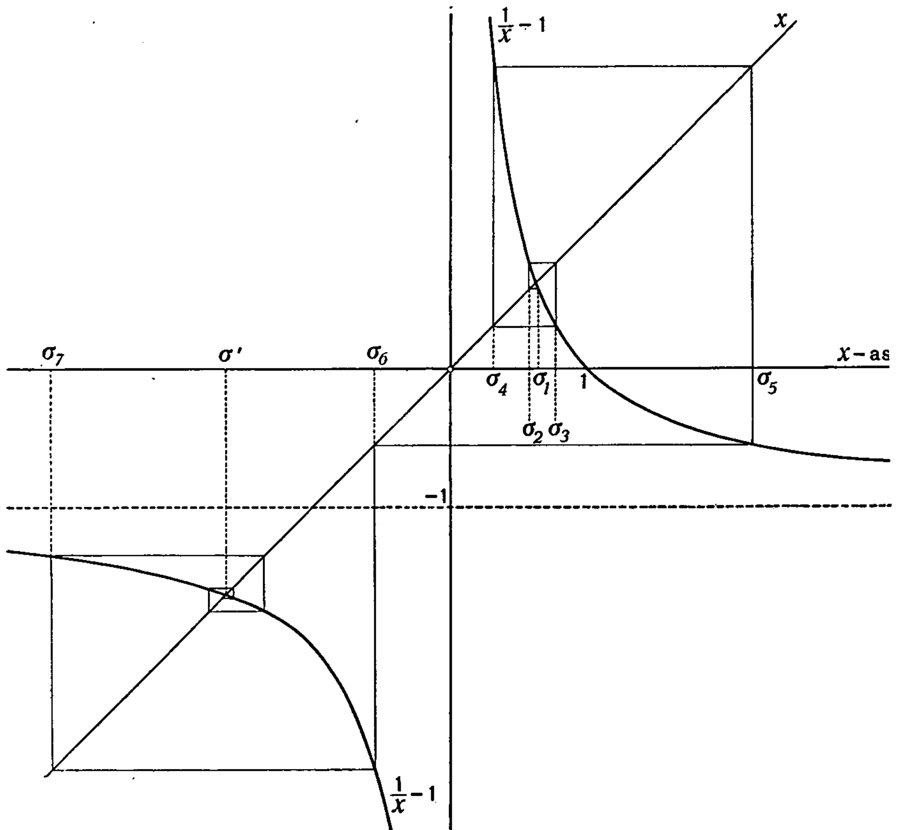


fig. 12.

Hiermee kunnen we nu de omvang van het onheil voorspellen. Zij eens $|\sigma_1 - \sigma| \approx 10^{-5}$ (heel redelijk wanneer men $\sqrt{5}$ m.b.v. een log. tafel bepaalt). Dan kan het reeds gebeuren dat $\sigma_{11} < \frac{1}{2}$, zodat reeds x_{11} in de verkeerde helft van het interval kan liggen (dus zeker exit gulden snede) terwijl de lengte van het interval dan pas op 1 procent is gereduceerd. Wat met name verrassend is aan dit resultaat, is het vroege tijdstip van het deraillement. Stel nl. voor het gemak de lengte van $[a, b]$ op 1. Dan verschilt x_1 minder dan 10^{-5} van de waarde die hij zou moeten hebben. Men zou dus waarschijnlijk op zijn vroegst moeilijkheden verwachten tegen de tijd dat de lengte van $[a_i, b_i]$ in de buurt van 10^{-5} komt. Maar de moeilijkheden komen al bij 10^{-2}. Terwijl x_1 slechts een fout van 10^{-5} vertoont, verschilt x_{11} al omstreeks 10^{-3} van de waarde die hij zou moeten hebben.

Het gesignaleerde verschijnsel is een kras staaltje van *instabiliteit*: doordat men de door de wiskunde voorgeschreven handelingen niet exact uitvoert (afrondfouten) kan een proces zich bij praktische uitvoering zeer snel zeer ver verwijderen van wat het theoretisch verondersteld werd te doen. Men moet op de mogelijkheid van instabiliteit steeds bedacht zijn bij het opstellen van processen, en het is natuurlijk de kunst stabiele processen te bedenken. Zonder bewijs delen we mee dat het guldensnede-proces uitgevoerd volgens (8) stabiel is; het gaat dan inderdaad goed totdat de lengte van $[a_i, b_i]$ in de buurt komt van de fout in x_1.

17. Bij iteratieve processen rijst altijd de vraag, wanneer op te houden, dus naar het zgn. stopcriterium. Men kan bij het guldensnede-proces bijv. ophouden wanneer het verkregen interval een lengte heeft die kleiner is dan een gespecificeerde waarde. Vaak echter is de bedoeling het antwoord zo nauwkeurig op te leveren als mogelijk is met het gegeven proces en de precisie waarmee de functiewaarden te bepalen zijn. In dat geval kan men doorgaan totdat een interval $[a_k, b_k]$ verkregen wordt met daarop de punten y_k, z_k (zie fig. 5) zodat de voor a_k, y_k, z_k, b_k bepaalde functiewaarden in strijd zijn met de conditie voor eentoppigheid (deze conditie luidt $[f(z_k) \geqq f(y_k) > f(a_k)] \vee [f(y_k) \geqq f(z_k) > f(b_k)]$). Men kan hopen aldus te eindigen met een interval waarvan de lengte in grootteorde gelijk is aan de onzekerheid waarmee t.g.v. de ruis de abscis van het maximum bepaald is; door toevallige omstandigheden kan het uiteindelijke interval echter wel veel korter of langer zijn (zie 13).

Besluit: In het voorgaande zagen we hoe men ook reeds bij het toepassen van zeer eenvoudige wiskunde in dito processen in aan-

raking kan komen met problemen betreffende economie, strategie, stabiliteit, ruis, stopcriterium. Bij vrijwel elk numeriek proces ontmoet men enkele van deze problemen, en het is de taak van de numericus tussen de klippen door te zeilen. Het zijn o.a. deze aspecten, die de theoretische wiskunde niet kent, en die medebepalend zijn voor de identiteit van het onderhavige vakgebied; die ook een kenmerkende wijze van omgaan met de wiskunde dicteren.

De vraag rijst wellicht welke rol de computer nu speelt in dit geheel, waar het immers duidelijk is dat de gesignaleerde problematiek gebonden is aan het proces, en optreedt zodra men dit proces gaat uitvoeren, om het even of dit nu met de hand of met de computer gebeurt.

Door de komst van de computer echter is deze problematiek pas actueel geworden. Een van de redenen hiervoor is ongetwijfeld dat het numeriek uitwerken van problemen door deze komst zozeer is aangemoedigd en daardoor zoveel vaker gebeurt. Een meer fundamentele reden is echter dat bijv. instabiliteitseffecten vaak eerst manifest worden na vele rekenstappen, veel meer dan men er met de hand ooit zou uitvoeren, maar veel minder dan men de computer wenst te laten uitvoeren. Een andere is, dat men bij het rekenen met de hand, al rekenende, de calamiteiten veelal ziet aankomen, en daar ter plaatse iets aan doet, terwijl men van de computer veelal slechts het eindantwoord wenst te vernemen, en de tussenresultaten (die de calamiteit mogelijk zouden onthullen) onder water laat blijven. Het is dan ook de door de computer op grote schaal mogelijk geworden *automatisering* van het rekenen, waardoor de genoemde problematiek sterk aan het licht gekomen is.

Adreswijziging:

met ingang van 1 januari 1968 luidt het adres van

COMMISSIE MODERNISERING LEERPLAN WISKUNDE

en van

NEDERLANDSE ONDERWIJSCOMMISSIE VOOR WISKUNDE

Budapestlaan, Universiteitscentrum „De Uithof",
Utrecht. Telf. 030-511411.

DE RECHTE QUANTIFICATOR OP DE RECHTE PLAATS

en

HET ZUIVERE FUNCTIEBEGRIP

door

A. J. Th. MAASSEN
Arnhem

In zijn artikel „*Rondom het gelijkteken*" (Euclides 42, IX, 269—277) bespreekt dr. Joh. H. Wansink de volgende vragen („opdrachten")

voor welke x: $x^2 + 3 = 7$?
voor welke x: $x^2 + 2ax + a^2 = 9$?

Wansink noteert deze vragen, prof. Freudenthal navolgend, als volgt:

$$?_x[x^2 + 3 = 7]; \quad ?_x[x^2 + 2ax + a^2 = 9].$$

Als oplossingsverzamelingen geeft hij achtereenvolgens:

de getallenverzameling $\{-2; 2\}$,
de „verzameling van functies" $\{-a - 3; -a + 3\}$.

Vervolgens bespreekt Wansink: $?_x \wedge_a [x^2 + 2ax + a^2 = 9]$, waarvan hij als oplossingsverzameling noemt: de „verzameling van functies" $\{-a - 3; -a + 3\}$.
Tenslotte vermeldt Wansink een moeilijkheid, n.l.
„de oplossingsverzameling van $?_x \wedge_a [x^2 + ax = a + 1]$ kan zowel de getallenverzameling $\{1\}$; als de verzameling $\{1; -a - 1\}$ zijn"; naar aanleiding daarvan introduceert hij het symbool: $?_{x=f(a)}$.

Alvorens hierop kritiek te geven, merk ik op:
a. Ik deel Wansinks voorkeur voor $\wedge$ en $\vee$ boven $\forall$ en $\exists$ als symbolen voor de quantificatoren „voor alle" en „er is een" (zie Wansink: *Didactische Oriëntatie voor wiskundeleraren I*, pag. 115); ik geef er de voorkeur aan, deze voorkeur metterdaad te laten blijken.
b. Het lijkt mij van grote didactische waarde, steeds het variabiliteitsgebied van een gebonden variabele te vermelden. Vaagheden

kan men zich slechts veroorloven tegenover een publiek dat in het vak ingewijd is en dat weet wat met de vaagheden wordt bedoeld; een dergelijk publiek is een schoolklas maar zelden.

Laten we nu de door Wansink genoemde vergelijkingen met de daarbij behorende oplossingsverzamelingen één voor één bekijken.

i. $?_{x \in R} [x^2 + 3 = 7]$

Omdat: $\wedge_{x \in R}[(x^2 + 3 = 7) \Leftrightarrow (x = 2 \vee x = -2)]$, is $\{-2; 2\}$ de oplossingsverzameling van $?_{x \in R}[x^2 + 3 = 7]$. We noteren dit laatste zó: $\{-2; 2\} = \{x \in R | x^2 + 3 = 7\}$.

ii. $?_{x \in R}[x^2 + 2ax + a^2 = 9]$

Deze vraag heeft slechts zin, als hij als volgt wordt verstaan: Gegeven een reëel getal; we noemen het a; $?_{x \in R}[x^2 + 2ax + a^2 = 9]$. Nu is: $\wedge_{x \in R}[(x^2 + 2ax + a^2 = 9) \Leftrightarrow (x = -a - 3 \vee x = -a + 3)]$; en dus:
$\{-a - 3; -a + 3\}$ is de oplossingsverzameling van $?_{x \in R}[x^2 + 2ax + a^2 = 9]$; dit laatste is waar voor elke $a \in R$, en dus: $\wedge_{a \in R}[\{x \in R | x^2 + 2ax + a^2 = 9\} = \{-a - 3; -a + 3\}]$.

iii. $?_{x \in R} \wedge_{a \in R}[x^2 + ax = a + 1]$

Omdat $\wedge_{x \in R}[(\wedge_{a \in R}[x^2 + ax = a + 1]) \Leftrightarrow (x = 1 \wedge x^2 = 1)]$, is $\{1\}$ de oplossingsverzameling van iii.

iv. $?_{x \in R} \wedge_{a \in R}[x^2 + 2ax + a^2 = 9]$

De oplossingsverzameling van iv. is leeg, omdat
$\wedge_{x \in R}[(\wedge_{a \in R}[x^2 + 2ax + a^2 = 9]) \Leftrightarrow (1 = 0 \wedge 2x = 0 \wedge x^2 = 9)]$.

Het ziet er naar uit, dat Wansink met de mededeling:
$\{-a - 3; -a + 3\}$ is de oplossingsverzameling van $?_x \wedge_a[x^2 + 2ax + a^2 = 9]$ iets anders bedoelt, dan hij feitelijk uitdrukt, en wel:

$\wedge_{a \in R}[\{-a - 3; -a + 3\}$ is de oplossingsverzameling van $?_{x \in R}[x^2 + 2ax + a^2 = 9]$; en dat hij met de bewering:

$\{1; -a - 1\}$ is de oplossingsverzameling van $?_x \wedge_a[x^2 + ax = a + 1]$, feitelijk bedoelt:
$\wedge_{a \in R}[\{1; -a - 1\}$ is de oplossingsverzameling van $?_{x \in R}[x^2 + ax = a + 1]]$.

Het is maar een kwestie van de plaats van de quantificator!

v. *De „verzamelingen van functies" en het symbool* $?_{x = f(a)}$

Op pagina 273 schrijft Wansink:
Terwijl de oplossingsverzameling van de vergelijking $?_x(x^2 + 3 = 7)$

een getallenverzameling was, beschouwen we een verzameling van functies van a als oplossingsverzameling van de vergelijking $?_x(x^2 + 2ax + a^2 = 9)$.
Substitutie van $-a-3$ en van $-a+3$ doet het oordeelsschema $x^2 + 2ax + a^2 = 9$ overgaan in een identiteit van a.
Wansink suggereert dat $-a-3$ en $-a+3$ functies van a zijn, en dat er twee „functies x van a" zijn die $x^2 + 2ax + a^2 = 9$ doen overgaan in een identiteit.
Laten we de zaken nauwkeurig bekijken.
We noemen de klasse van de functies van R naar R: F.
Wansink schijnt met zijn vraag op pagina 274:
$?_{x=f(a)}[x^2 + 2ax + a^2 = 9]$ te bedoelen:

$$?_{\varphi \in F} \wedge_{a \in \mathrm{R}} [\varphi^2(a) + 2a \,.\, \varphi(a) + a^2 = 9]. \qquad (1)$$

Nu is:

$$\wedge_{\varphi \in F} [\wedge_{a \in \mathrm{R}} [\varphi^2(a) + 2a \,.\, \varphi(a) + a^2 = 9] \Leftrightarrow \wedge_{a \in \mathrm{R}} [\varphi(a) = -a - 3 \vee \varphi(a) = -a + 3]];$$

en dus

$$\{\varphi \in F | \wedge_{a \in \mathrm{R}} [\varphi^2(a) + 2a \,.\, \varphi(a) + a^2 = 9]\} = \{\varphi \in F | \wedge_{a \in \mathrm{R}} [\varphi(a) = -a - 3 \vee \varphi(a) = -a + 3]\}.$$

De oplossingsverzameling van (1) bevat dus oneindig veel elementen, hieronder zijn natuurlijk de twee functies die Wansink waarschijnlijk bedoelt, nl. $x \to -x - 3$ en $x \to -x + 3$ maar ook bijvoorbeeld de functie $g : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ die gedefinieerd wordt door:

$$\begin{cases} g(x) = -x - 3, \text{ als } x \text{ rationaal is} \\ g(x) = -x + 3, \text{ als } x \text{ irrationaal is.} \end{cases}$$

Tot besluit:
a. Ik twijfel er niet aan, of men kan leerlingen in korte tijd leren oplossen:

$$x^2 + ax + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -\tfrac{1}{2}a + \tfrac{1}{2}\sqrt{a^2 - 4} \vee x = -\tfrac{1}{2}a - \tfrac{1}{2}\sqrt{a^2 - 4}.$$

Men geeft hun daarmee geen idee van wiskundige precisie.
Ik denk, dat het Wansinks bedoeling was, met zijn symbool $?_{x=f(a)}$ en met zijn opmerking „dat ook moet worden opgegeven voor welke deelverzameling van R de te bepalen functies zijn gedefinieerd (in dit geval de deelverzameling $\{a \in \mathrm{R} | a \leqq -2 \vee a \geqq 2)$", die precisie enigszins te herstellen.
Het is jammer, dat bij zijn voorstel het zuivere functiebegrip in de mist verdwijnt. Ik kan zijn voorkeur voor het symbool $?_{x=f(a)}$ dan ook niet delen.

b. De zondebokken zijn hier zonder twijfel opdrachten zoals: „Gegeven $x^2 + ax + 1 = 0$; druk x uit in a" (ofwel: los x op uit: $x^2 + ax + 1 = 0$) en
„Gegeven $x^2 + ax + 1 = 0$; druk a uit in x" (ofwel: los a op uit: $x^2 + ax + 1 = 0$).
Hiermee kan -dunkt me- niets anders bedoeld zijn dan:

„Zij $a \in R$; voor welke $x \in R$: $x^2 + ax + 1 = 0$?" resp.
„Zij $x \in R$; voor welke $a \in R$: $x^2 + ax + 1 = 0$?"

De antwoorden luiden:
Als $-2 < a < 2$ dan: $\{x \in R | x^2 + ax + 1 = 0\} = \emptyset$,
en als $a \leqq -2 \vee a \geqq 2$ dan: $\{x \in R | x^2 + ax + 1 = 0\}$
$= \{-\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - 4}; -\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - 4}\}$,
respectievelijk:
Als $x = 0$, dan: $\{a \in R | x^2 + ax + 1 = 0\} = \emptyset$, en
voor alle x waarvoor $x \neq 0$: $\{a \in R | x^2 + ax + 1 = 0\} = \left\{\frac{-x^2 - 1}{x}\right\}$.

Op deze wijze zijn de problemen helder gesteld en worden eerlijke oplossingen van die problemen gegeven. Hierbij speelt het functiebegrip vooralsnog geen rol. Wie dat wel een rol toebedeelt, wake er voor, niet in het moeras te geraken dat onder v. is gesignaleerd; ik vrees, dat middelbare scholieren in behendigheid en kracht te kort schieten, om zich uit dàt moeras te redden.
De opdrachten „druk x uit in a" resp. „druk a uit in x" zijn te wazig om in-het-begin-toelaatbaar te kunnen worden geacht: we beschikken immers over een heldere formulering.

Om natuur- en scheikundecollega's terwille te zijn, kunnen wiskundeleraren deze vage uitdrukkingen natuurlijk introduceren, wanneer eenmaal dergelijke problemen in hun heldere vorm door de leerlingen begrepen worden. Het is goed, dat leerlingen ervaren dat „ook wiskundigen slordig zijn, maar dat wiskundigen tenminste wéten, dat ze het zijn" (naar een uitspraak van prof. van der Blij).

Naschrift.

(1) Ik ben de heer Maassen zeer dankbaar voor zijn indringende, kritische analyse van het onderhavige probleem. Zijn bezwaren zijn van logisch standpunt beschouwd stellig steekhoudend. Ik hoop, dat het inderdaad mogelijk zal blijken onze leerlingen te brengen tot het oplossen van vergelijkingen met parameters volgens methoden die leiden tot de door Maassen voorgestelde precisie van uitdrukking. Zijn doel zal echter naar mijn mening slechts bereikt kunnen worden, als alle vergelijkingen met parameters aanmerke-

lijk later aan de orde worden gesteld dan thans gewoonlijk het geval is.

(2) Ik aanvaard Maassens bezwaren tegen de plaats van de kwantoren geheel. Zie voor mijn opvattingen de opmerking op p. 265 van deel II van mijn *Didactische Oriëntatie.*

(3) Het verschil in opvatting tussen Maassen en mij voor wat betreft het symbool $x = f(p)$ onder de interrogatieve kwantor hangt samen met de omstandigheid, dat mij hierbij nog voor ogen heeft gestaan het functiebegrip geformuleerd in het rapport van de Nomenclatuurcommissie 1959 op p. 55 van *Euclides* **35**. Hier lezen we namelijk nog: „Men noemt $2x + 5$ een functie van x". In het wiskundig onderwijs van vandaag en morgen komt voor dit primitieve functiebegrip stellig het door Maassen gehanteerde in de plaats.

(4) Op grond van de geopperde bezwaren zou ik thans het symbool $x = f(p)$ onder de interrogatieve kwantor liever door $x(p)$ zien vervangen, ook al begrijp ik, dat ik daarmee aan Maassens wezenlijke bezwaren niet tegemoet kom. Het symbool krijgt dan de betekenis van „druk x in p uit".
Ik vind de opdracht x in p uit te drukken (en voor de uitvoering van deze opdracht staat men ook bij Maassens methode) van een voor ons beginonderwijs acceptabele vaagheid. Ideale precisie kome aan het slot, men starte er niet mee. Het eigenlijke functiebegrip blijft hierbij dan nog enigszins op de achtergrond. Er wordt echter aan een latere precisering in Maassens geest niets in de weg gelegd.

Ook in de techniek van het oplossen van vergelijkingen met parameters in de geest van Maassen is het vinden van „uitdrukkingen" als $-\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}\sqrt{(a^2 - 4)}$ en $-\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}\sqrt{(a^2 - 4)}$ een wezenlijk element. Dat daarbij het zuivere functiebegrip tijdelijk nog in de mist blijft hangen, vind ik niet catastrofaal, mits de docent maar zorg draagt, dat die mist voor de leerling te zijner tijd optrekt.

Joh. H. Wansink

VERSCHEIDENHEDEN

door

Prof. dr. O. Bottema

Delft

LXX. *Elementary, dear Watson.*

De thans zo onaanzienlijke *geometria,* assepoester in het huidige mathematisch bestel, krijgt toch nog op haar tijd *fanmail* uit de smalle gemeente van haar bewonderaars. De eenvoudige planimetrische opgave, die Frans van Schooten meer dan drie eeuwen her aan Christiaan Huygens voorlegde en die in Verscheidenheden LXVII (*Euclides,* 42, 1966/67, 204—208) werd besproken, bleek aanleiding te geven tot menig schriftelijk en mondeling weerwoord. Met toestemming van de redactie en van de hieronder met name genoemde correspondenten worden in deze bijdrage de opmerkingen samenvattend verzameld.

Het vraagstuk luidde als volgt. Gegeven is de driehoek ABC met op AB en AC respectievelijk de punten D en E. Gevraagd wordt op BC een punt F te construeren, zo dat de hoeken BDF en FEC gelijk zijn. Ter aangehaalde plaatse werd een drietal oplossingen aangegeven. In de eerste twee werd de meetkundige plaats bepaald van de punten S, waarvoor de hoeken BDS en SEC gelijk zijn en wel respectievelijk projectief-meetkundig en analytisch. Het resultaat was een orthogonale hyperbool, waarvan dan het snijpunt met BC het gevraagde punt F is. Een derde methode bracht de vraag terug tot het oplossen van een goniometrische vergelijking van een bekend type.

Ten aanzien van de mogelijkheid van een elementaire oplossing was het in de gedachtengang van de schrijver niet verder gekomen dan tot een vaag vermoeden.

Wij geven nu maar dadelijk de oplossing van Dr. J. T. Groenman, die naar de mening van alle betrokkenen de prijs zou mogen krijgen voor de beste inzending. Zijn constructie luidt, na het aanbrengen van een kleine *retouche* door Prof. dr. S. C. van Veen, als volgt (fig. 1).

Spiegel de driehoek in de basis BC; zij E' het beeldpunt van E en G het snijpunt van CE' met het verlengde van AB. Daar $\angle FEC$

$= \angle FE'C$ zijn $\angle GE'F$ en $\angle GDF$ elkaars supplement, waaruit volgt dat $GE'FD$ een koordenvierhoek is. Het gevraagde punt F wordt dus gevonden als snijpunt van BC met de cirkel door de drie bekende punten D, G en E'.

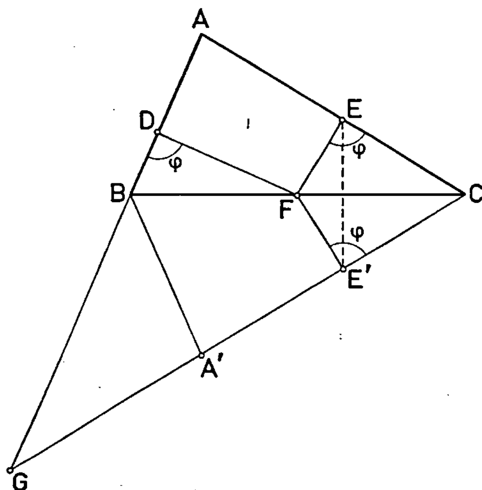


fig.1.

B ligt tussen G en D en dus binnen de cirkel, C ligt buiten GE' en dus buiten de cirkel: tussen B en C ligt dus steeds één enkel punt van de cirkel. Het tweede snijpunt van de lijn BC met de cirkel levert de figuur die ook reeds in het oorspronkelijke opstel genoemd werd.

De oplossing laat aan eenvoud niet meer te wensen over. Dat rechtvaardigt als begeleiding de klassieke opmerking van het genie uit Baker Street tot zijn goede vriend, die een neiging had te veel achter de dingen te zoeken.

Ook Prof. dr. G. R. Veldkamp zond ons een elementaire oplossing van het vraagstuk. Daarin werd eveneens een spiegeling toegepast en wel ten opzichte van de bissectrice van A. In eenvoud lag zij bij de bovenstaande constructie achter en daar het goede gaarne wijkt voor het betere, wordt zij hier niet gereproduceerd. Hetzelfde geldt voor een tweetal van M. J. Ritter ontvangen oplossingen, die het gevraagde punt door middel van een algebraïsche analyse bepalen.

De enige correspondent die het vraagstuk bleek te kennen was Drs. R. Kooistra, die zich reeds enige jaren geleden er mee heeft beziggehouden daarbij zowel de goniometrische oplossing als de analytische (met een wat ander coördinatenstelsel) vond.

Een uitvoerig schrijven over het onderwerp ontvingen wij van Prof. dr. S. C. van Veen, wiens jarenlange omgang met Huygens' werk welbekend is. Hij deelt allereerst mede dat ook hem uit de in de *Oeuvres* gepubliceerde briefwisseling niet is gebleken, dat ooit op het gestelde probleem is teruggekomen. Zich verder met aandacht verdiepend in de vraag hoe Huygens het eventueel had kunnen oplossen, komt *van Veen* op grond van de denkwijze van tijd en milieu en gegeven Christiaan's kennis van zaken omstreeks 1648, tot de uitspraak dat de meetkundige oplossing met behulp van de hyperbool het meest waarschijnlijk is. De negentiende-eeuwse voortbrenging daarvan door projectieve stralenbundels zal hij niet hebben benut, maar Huygens kende zijn Apollonius en moet op grond van diens methodieken en theorema's de meetkundige plaats hebben kunnen afleiden en ook wel de snijpunten daarvan met de basis van de driehoek.

In de correspondentie van Huygens komen nog vele andere meetkundige opgaven, van uiteenlopende aantrekkelijkheid, aan de orde. Het blijkt niet nodig ze uit de *Oeuvres* bijeen te zoeken. Het is ons namelijk achteraf gebleken dat zulks reeds is gebeurd door P. van Geer, die onder de titel *Hugenia geometrica* een twaalftal artikelen publiceerde over het meetkundige werk van Huygens in opvolgende jaargangen van het *Nieuw Archief voor Wiskunde* van 1907 tot 1913. In het eerste artikel (N.A. v. W., 2e reeks, deel VII, 1907, 215—226) treft men uit de correspondentie van 1646 tot 1656 in chronologische volgorde 22 dezer opgaven aan; het door ons besprokene vindt men op bladzijde 220 onder no. 7. Als de correspondentie ook de oplossing bevat wordt deze door van Geer bijgevoegd. Bij no. 7 (en een aantal andere) komt geen bijschrift voor, zodat het wel zeer waarschijnlijk wordt dat Huygens en zijn wetenschappelijke vrienden niet op de opgave zijn teruggekomen.

In zijn algemene beschouwingen herinnert van Geer er aan dat noch de coördinatenleer van Descartes, noch de ontwikkeling van de trigonometrie door Snellius op de denkwijze van Huygens van grote invloed zijn geweest en dat deze verknocht bleef aan de zuiver meetkundige methode der ouden, een opmerking die het door van Veen geuite vermoeden versterkt.

DE PARAMETERVOORSTELLING VAN EEN PUNT OP DE PARABOOL EN OP DE LIJN

door

R. KOOISTRA

Ede

1. In de wiskunde l.o.-rubriek van het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde en ook in de klas gebruiken we steeds de handige parametervoorstelling $P(2p\lambda^2;\ 2p\lambda)$ voor een punt P, gelegen op de parabool $y^2 = 2px$. Is de parameter p van de parabool bekend, dan is vaak P nog eenvoudiger voor te stellen b.v.

$$y^2 = 8x \rightarrow P(2\lambda^2;\ 4\lambda); \qquad y^2 = -8x \rightarrow P(-2\lambda^2;\ 4\lambda),$$
$$y^2 = 4x \rightarrow P(\lambda^2;\ 2\lambda); \qquad y^2 = -4x \rightarrow P(-\lambda^2;\ 2\lambda).$$

In twee van de ons ter beschikking staande v.h.m.o.-leerboeken vonden we deze voorstelling van P vermeld [1].

Het moet de klas daarbij goed duidelijk zijn, dat het *teken* van $x = 2p\lambda^2$ voor zowel $p > 0$ als $p < 0$ zonder meer in orde is ($p > 0 \Leftrightarrow x > 0$; $p < 0 \Leftrightarrow x < 0$) en dat we, omdat λ toch elke waarde aanneemt, van de oplossingen $y = \pm\, 2p\lambda$ van $y^2 = 4p^2\lambda^2$ die met het positief-teken kunnen kiezen.

De voordelen van deze voorstelling zijn:

a. Er is één variabele λ en niet twee, die optreden als we $P(\bar{x}, \bar{y})$ zouden stellen.
b. De betrekking $\bar{y}^2 = 2p\bar{x}$ kan vervallen en kan dus ook niet worden vergeten.

2. *a.* We nemen als voorbeeld het volgende vraagstuk: *Gegeven is de parabool $y^2 = 4x$. Een punt P doorloopt de parabool. De raaklijn in P snijdt de x-as in A en de y-as in B. Bepaal de verzameling van de middens M van AB.*

1e *Opl.*: Stel $P(\lambda^2;\ 2\lambda)$. De vergelijking van de raaklijn in P luidt $\lambda y = x + \lambda^2$, zodat de snijpunten A en B opv. zijn: $(-\lambda^2;\ 0)$ en $(0;\ \lambda)$ $(\lambda \neq 0)$. Is nu M $(\bar{x}; \bar{y})$, dan geldt:

$$\left.\begin{aligned}\bar{x} &= -\tfrac{1}{2}\lambda^2\\ \bar{y} &= \tfrac{1}{2}\lambda\end{aligned}\right\} \Rightarrow \bar{y}^2 = -\tfrac{1}{2}\bar{x},$$

[2]) D. J. E. Schrek, *Beknopte An. Meetkunde*, blz. 87; P. Wijdenes, *An. Meetkunde* blz. 44.

zodat de gevraagde vergelijking $y^2 = -\tfrac{1}{2}x$ is.

2e *Opl.*: (zonder parameter-voorstelling). Stel $P(\bar{x}; \bar{y})$, dan is $\bar{y}^2 = 4\bar{x}$. De raaklijnvergelijking is nu: $\bar{y}y = 2x + 2\bar{x}$, waaruit de snijpunten $A(-\bar{x}; 0)$ en $B\left(0; \dfrac{2\bar{x}}{\bar{y}}\right)$. Is $M(x; y)$, dan geldt:

$$\left.\begin{aligned} x &= -\tfrac{1}{2}\bar{x} \\ y &= \frac{\bar{x}}{\bar{y}} \end{aligned}\right\} \Rightarrow y^2 = \frac{\bar{x}^2}{\bar{y}^2} = \frac{\bar{x}^2}{4\bar{x}} = \tfrac{1}{4}\bar{x} = -\tfrac{1}{2}x \quad (\bar{x} \neq 0, \bar{y} \neq 0).$$

Onderzoek van $P(0; 0)$ en $\lambda = 0$ leert, dat ook de oorsprong tot de verzameling $y^2 = -\tfrac{1}{2}x$ behoort.

Men vergelijke beide oplossingen en oordele zelf. Overigens is ook de 2e opl. nog vrij wat eenvoudiger dan die in het leerboek [1]), waaraan we dit vraagstuk ontlenen.

b. Een wel heel mooie toepassing biedt ons het 3e vraagstuk van het eindexamen 1963:

Bewijs dat elke raaklijn van de parabool $y^2 = 8x$ *behoort tot het stelsel lijnen* $x - py + 2p^2 = 0$. *(p variabel).*

Opl.: De raaklijn in $P(2\lambda^2; 4\lambda)$ van de parabool is de lijn met vergelijking

$$4\lambda y = 4x + 8\lambda^2$$

of

$$x - \lambda y + 2\lambda^2 = 0 \qquad \text{q.e.d.}$$

c. We ontlenen aan P. Wijdenes, *Beknopte anal. meetkunde* nog het volgende voorbeeld (blz. 64, vb 3):

Voor de loodrecht op elkaar staande koorden OA en OB van de parabool $y^2 = 2px$ *geldt:* $OA = 8 \times OB$. *Bereken de richtingscoëfficiënt van AB.*

1e *Opl.*: (zonder parametervoorstelling). Zij m de richtingscoefficiënt van OA, dan is die van OB gelijk aan $-1/m$. Om de gedachten te bepalen zullen we $m > 0$ onderstellen; spiegeling in de x-as levert dan tenslotte een tweede oplossing.

De abscis van A is de van nul verschillende wortel van $(mx)^2 = 2px$ dus gelijk aan $2p/m^2$, die van B is $2pm^2$. Voor de ordinaten daarbij geldt:

$$y_A^2 = \frac{4p^2}{m^2} \quad \text{opv.} \quad y_B^2 = 4p^2m^2.$$

---

[1]) Drs. P. E. Lepoeter, *Gids voor de an. meetkunde*; blz. 117 e.v.

Nu is:

$$OA^2 = x_A^2 + y_A^2 = \frac{4p^2}{m^4} + \frac{4p^2}{m^2}$$

en

$$OB^2 = x_B^2 + y_B^2 = 4p^2 m^4 + 4p^2m^2.$$

Uit $OA^2 = 64\ OB^2$ volgt nu:

$$\frac{1}{m^4}(1 + m^2) = 64\, m^2(1 + m^2)$$

of

$$m^6 = {}^1/_{64} \Rightarrow m = {}^1/_2.$$

De punten A en B zijn dus opv. $(8p; 4p)$ en $(\frac{1}{2}p; -p)$, dus is de gevraagde richtingscoëfficiënt:

$$\frac{4p + p}{8p - \frac{1}{2}p} = \frac{5}{7\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}.$$

De gevraagde coëfficiënten zijn dus $\pm\ {}^2/_3$.

2e *Opl.*: (met parametervoorstelling). We stellen de punten A en B opv. $(2p\lambda^2; 2p\lambda)$ en $(2pt^2; 2pt)$. De richtingscoëfficiënt van AB is dan:

$$m = \frac{2p(\lambda - t)}{2p(\lambda^2 - t^2)} = \frac{1}{\lambda + t}\ (\lambda \neq t).$$

Uit $m_1 m_2 = -1$ voor de richtingscoëfficiënten $m_1 = 1/\lambda$ van OA en $m_2 = 1/t$ van OB volgt: $1/\lambda t = -1$, $t = -1/\lambda$. Nu geldt:

$$OA^2 = 64\ OB^2 \quad \text{dus} \quad 4p^2(\lambda^2 + \lambda^4) = 64.\ 4p^2(t^2 + t^4)$$

of:

$$\lambda^2(1 + \lambda^2) = 64.\ t^2(1 + t^2) \quad \text{of} \quad \lambda^2(1 + \lambda^2) = 64.\ 1/\lambda^2(1 + 1/\lambda^2)$$

waaruit:

$$\lambda = \pm\, 2 \text{ en dus } m = \frac{1}{2 - \frac{1}{2}} = \frac{2}{3} \text{ of } m = \frac{1}{-2 + \frac{1}{2}} = -\frac{2}{3}.$$

3. Niet altijd verdient de parametervoorstelling de voorkeur boven de gewone voorstelling $P(\bar{x}; \bar{y})$ met $\bar{y}^2 = 2p\bar{x}$. Het enigszins beruchte examenjaar 1965 legde de examenkandidaten de volgende opgave voor:

Gegeven de parabool $y^2 = 4x$ *en de cirkel* $(x - 2)^2 + y^2 = 8$. *Stel de vergelijking op van de raaklijnen aan de parabool, die tot* $(4; 0)$ *de afstand* $3^1/_2$ *hebben.*

Opl.: De parametervoorstelling $P(\lambda^2; 2\lambda)$ voert tot de vergelijking $\left|\frac{4+\lambda^2}{\sqrt{1+\lambda^2}}\right| = {}^7/_2$, die menig leerling onrustig maakt, hoewel de vergelijking overigens eenvoudig op te lossen is: $\lambda = \pm\sqrt{3}$ of $\lambda = \pm\frac{1}{2}\sqrt{5}$.
Stellen we echter $P(\bar{x}; \bar{y})$, dan is de raaklijn-vergelijking

$$\bar{y}y - 2x - 2\bar{x} = 0$$

zodat we de vergelijking

$$\left|\frac{2\bar{x}+8}{\sqrt{\bar{y}^2+4}}\right| = {}^7/_2 \quad \text{of} \quad \left|\frac{2\bar{x}+8}{\sqrt{4\bar{x}+4}}\right| = {}^7/_2 \quad \text{of} \quad \left|\frac{\bar{x}+4}{\sqrt{\bar{x}+1}}\right| = {}^7/_2$$

moeten oplossen, die er iets eenvoudiger uitziet: $\bar{x} = 3$ of $\bar{x} = {}^5/_4$.

4. Bij de afleiding van de vergelijking van de raaklijn aan de parabool $y^2 = 2px$ neemt menig schrijver zijn toevlucht tot de differentiaal-rekening, om ingewikkeld rekenwerk te ontgaan. Het blijkt, dat we, gebruik makende van de parametervoorstelling, zeer wel de differentiaalrekening kunnen missen. Onder 2 vonden we voor de r.c. van de snijlijn AB : $m = \frac{1}{\lambda + t}$, zodat zijn vergelijking luidt:

$$y - 2p\lambda = \frac{1}{\lambda + t}(x - 2p\lambda^2).$$

Deze vergelijking gaat nu over in die van de raaklijn in A als $t \to \lambda$, dus

$$y - 2p\lambda = \frac{1}{2\lambda}(x - 2p\lambda^2).$$

Stellen we nu weer A $(\bar{x}; \bar{y})$ en substitueren we $\lambda = \bar{x}/\bar{y}$, dan verkrijgen we:

$$y - \bar{y} = \frac{\bar{y}}{2\bar{x}}(x - \bar{x})$$

of

$$2p\bar{x}y - 2p\bar{x}\bar{y} = p\bar{y}x - p\bar{y}\bar{x}$$
$$\bar{y}^2 y = p\bar{y}x + p\bar{y}\bar{x},$$

zodat de vergelijking van de raaklijn in A $(\bar{x}; \bar{y})$ luidt:

$$\bar{y}y = px + p\bar{x}.$$

5. Ook de afleiding van verschillende eigenschappen van de parabool verloopt vlot, als we van de parameter-voorstelling gebruik maken:

a) Is AB een koorde van de parabool $y^2 = 2px$, dan is de r.c. van de drager van AB (zie 2.): $m = \frac{1}{\lambda + t}$. Het midden M van AB is M $(p(\lambda^2 + t^2); p(\lambda + t))$, waarvan de ordinaat constant is, als dat met m het geval is, dus:

De verzameling van de middens van evenwijdige parabool-koorden is een halve lijn evenwijdig aan de as van de parabool.

b. De vergelijking van de raaklijn in $A(2p\lambda^2; 2p\lambda)$ luidt

$$2\lambda y = x + 2p\lambda^2.$$

Het snijpunt van de raaklijn en de y-as is $(0; p\lambda)$, het heeft dus de halve ordinaat van A tot ordinaat, bijgevolg is: *O het midden van PQ* waarbij Q $(2p\lambda^2; 0)$ de projectie is van A op de x-as en $P(-2p\lambda^2; 0)$ het snijpunt is van de raaklijn en de x-as.

De normaal in A heeft tot vergelijking

$$y - 2p\lambda = -2\lambda(x - 2p\lambda^2)$$

en snijdt dus de x-as in $R(p + 2p\lambda^2; 0)$, dus *de subnormaal* $QR = p$ en $F(\frac{1}{2}p; 0)$ *is het midden van PR.*

c) Voor een koorde AB, die door F gaat, is de volgende betrekking af te leiden:

De drager van AB heeft de vergelijking

$$y - 2p\lambda = \frac{1}{\lambda + t}(x - 2p\lambda^2)$$

AB gaat door F, als voldaan is aan

$$-2p\lambda(\lambda + t) = \tfrac{1}{2}p - 2p\lambda^2$$

of aan

$$\lambda t = -{}^1/_4$$

dus

$$\frac{x_A}{y_A} \cdot \frac{x_B}{y_B} = -{}^1/_4.$$

Onderstellen we $p > 0$ en $y_A > 0$, dan is $x_A > 0$, $x_B > 0$ en $y_B < 0$, zodat voor een koorde AB door F de betrekking geldt:

$$\text{tg AOF} \cdot \text{tg BOF} = 4.$$

onafhankelijk van p.

6. *a*. Zonder nu de parametervoorstelling van een punt P ($r\cos\varphi$; $r\sin\varphi$) op de cirkel $x^2 + y^2 = r^2$, waarbij $\varphi = \angle$(OP; x-as), te willen propageren, bewijst hij toch wel eens goede diensten als bv. in het vraagstuk 3 van het examen h.b.s. 1962 (analytische meetkunde). De gewone eliminatie van x_1 en y_1 is nogal lastig:

Gegeven zijn de cirkel $x^2 + y^2 = r^2$ en het punt A $(a; 0)$; $a > 0$, $a \neq r$. $P(x_1, y_1)$ is een punt van de cirkel. Bepaal de verzameling van het snijpunt S van OP en de as van AP, als P de cirkel doorloopt.

Opl.: Stel $x_1 = r\cos\varphi$ en $y_1 = r\sin\varphi$.
De r.c. en het midden van AP zijn opv.

$$\frac{r\sin\varphi}{r\cos\varphi - a} \quad \text{en} \quad \{\tfrac{1}{2}(r\cos\varphi + a);\ \tfrac{1}{2}r\sin\varphi\}.$$

$$S \text{ is het snijpunt van} \begin{cases} y = x \operatorname{tg}\varphi & (1) \\ (r\cos\varphi - a)x + (r\sin\varphi)y = \tfrac{1}{2}(r^2 - a^2) & (2) \end{cases}$$

Uit (1) volgt: $\cos\varphi = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ en $\sin\varphi = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$; dit gezet in (2) geeft na vermenigvuldiging van beide leden van (2) met $\sqrt{x^2+y^2}$ en na kwadratering daarvan:

$$r^2(x^2+y^2) = (\tfrac{1}{2}r^2 - \tfrac{1}{2}a^2 + ax)^2,$$

een *ellips* of *hyperbool* voorstellende al naar gelang $a^2 < r^2$ of $a^2 > r^2$ is.

We merken nog op, dat uit de bijbehorende figuur van deze opgave eenvoudig valt af te lezen:

SO + SA = r als A binnen de cirkel ligt en
SO − SA = r als A buiten de cirkel ligt.

b. Ook voor een punt op een rechte lijn heeft het vaak voordeel de parametervoorstelling te hanteren bv.

P op de lijn $x - y + 2 = 0 \rightarrow P(\lambda; \lambda + 2)$ (eindex. v.h.m.o. 1966)

P op de lijn $x - 2y + 4 = 0 \rightarrow P(2\lambda - 4; \lambda)$ (eindex. v.h.m.o. 1963)

P op de richtlijn van $y^2 = 2px \rightarrow P(-\tfrac{1}{2}p; \lambda)$ (eindex. v.h.m.o. 1962)

P op de lijn $2x + 9y = 18 \rightarrow P(9\lambda; 2 - 2\lambda)$ (Euclides, mrt '67, blz. 188)

c. Tenslotte nog de parametervoorstelling $P(a\cos\varphi;\ b\sin\varphi)$ voor een punt van een ellips, die te voorschijn komt in het volgende vraagstuk:

Op een lijn l liggen de vaste punten A, P en B in deze volgorde. Wat is de verzameling van P als A en B langs de benen van een rechte hoek glijden? (*Proclos*, 410—485).

Kiezen we het been, waarop A ligt, als x-as, het andere als y-as en stellen we PA $= b$, PB $= a$ en $\angle$OAB $= \varphi$, dan volgt de verzameling, zijnde een ellips, eenvoudig door eliminatie van φ tussen $x_p = a \cos \varphi$ en $y_p = b \sin \varphi$.

GEORG FERDINAND LUDWIG PHILIPP CANTOR

Cantor, de schepper der verzamelingsleer, is 50 jaar geleden, op 8 januari 1918, te Halle overleden. Op 3 maart 1845 is hij te Sint-Petersburg geboren, waar zijn uit Kopenhagen afkomstige vader zich gevestigd had. In 1856 verhuisde het gezin naar Frankfurt am Main. Nadat Georg op wens van zijn vader eerst twee jaar techniek gestudeerd had, kreeg hij toch in 1862 diens toestemming om wiskunde te studeren. Eerst was hij een jaar te Zürich, daarna in Berlijn, met nog een korte onderbreking te Göttingen. Na zijn promotie in 1867 werd hij achtereenvolgens privaatdocent (1869), buitengewoon- (1872) en gewoon hoogleraar (1879) te Halle.

Van 1872 dateert een kort artikel *Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen* (Math. Annalen). Hierin vinden we de invoering van het reële getal als limiet van een convergente rij van rationale getallen: de „fundamentaalrij" van Cantor, alsook al de kiem van zijn latere verzamelingsleer. Zijn grote werk daarover is in zes afleveringen in de *Mathematische Annalen* verschenen (1879—1884): *Über unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten.* Al eerder had hij in een drietal korte artikelen de begrippen „machtigheid" van een verzameling en „aftelbare" verzameling ingevoerd en bewezen, dat de verzameling der reële getallen niet aftelbaar is en dat de machtigheid van het continuum onafhankelijk is van zijn dimensie. In het genoemde grotere werk wordt dit alles nog eens herhaald; verder vinden we erin de thans zo bekende begrippen „doorsnede" en „vereniging" van verzamelingen, dan nog de definitie van geordende verzameling en ook een constructieprincipe voor oneindige verzamelingen met opeenvolgende machtigheden, met als eerste de aftelbaar-oneindige verzameling, dan een met de tweede machtigheid, de derde enz. Aan het slot spreekt Cantor het vermoeden uit, dat het continuum de tweede machtigheid heeft. Van dit laatste stelt hij een bewijs in het vooruitzicht;

hij heeft het echter niet kunnen geven en tot op heden is dit zogenaamde „continuumprobleem" onbewezen.

Cantor heeft op zijn ideeën, het invoeren van het „actueel-oneindige" in de wiskunde, veel kritiek gehad, met name van zijn vroegere leermeester Kronecker, die te Berlijn een invloedrijke positie bezat. Dit en het feit, dat hij er niet in slaagde zijn voor de machtigheid van het continuum uitgesproken vermoeden te bewijzen maakten hem neerslachtig, waardoor hij enige tijd een afkeer van zijn wiskundig werk kreeg. Anderzijds had hij ook wel aanmoediging en hij vond veel steun in de van 1872 daterende vriendschap met Dedekind.

Later was hij een dergenen, die ijverden voor het tot stand komen der „Deutschen Mathematikervereinigung", waarvan hij van 1890 tot 1893 de eerste voorzitter geweest is.

In zijn laatste werk *Beiträge zur Begründigung der transfiniten Mengenlehre* (Math. Annalen, 1895, 1897) geeft hij nog eens een overzicht van zijn verzamelingsleer. Voor machtigheid vinden we nu de term „kardinaalgetal"; het eerste transfiniete kardinaalgetal, dat der aftelbaar-oneindige verzameling, heet „Alef-nul", enz.

Cantor's ideeën hebben tenslotte ruime erkenning gekregen, te te beginnen op het eerste internationale congres van wiskundigen te Zürich in 1897. Ook ontving hij verschillende wetenschappelijke onderscheidingen. De verzamelingsleer werd een aparte tak der wiskunde waarvan in 1906 (W. H. Young) en in 1914 (F. Hausdorff) de eerste handboeken verschenen.

A. J. E. M. Smeur

RECREATIE

Nieuwe opgaven met oplossingen en correspondentie over deze rubriek gelieve men te zenden aan Dr. P. G. J. Vredenduin, Kneppelhoutweg 12, Oosterbeek.

189.

$$\underset{(u)}{12} \cdot \underset{(v)}{34} + 6789 = \underset{(x)}{67} \cdot \underset{(y)}{89} + 1234.$$

Vul in zo, dat een analoog resultaat ontstaat:

$$33 \cdot 82 + \ldots\ldots = \ldots \cdot \ldots + 3382.$$

Stel een methode op om bij gegeven u en v een oplossing voor x en y te vinden.

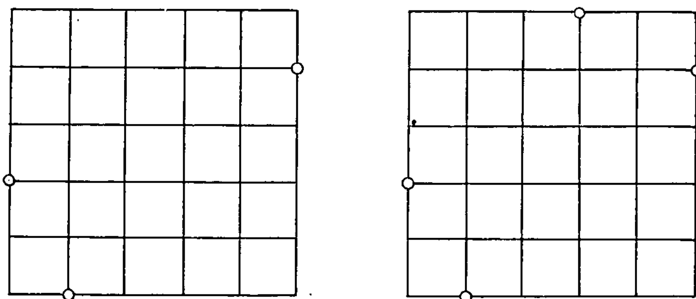
(B. Kootstra)

190. Gegeven is een zeshoek met daarbinnen vier punten. Verbind de hoekpunten van de zeshoek en de erbinnen gelegen vier punten zo door middel van lijnstukken, dat de zeshoek verdeeld wordt in driehoeken, waarvan de hoekpunten uitsluitend in deze tien punten liggen. Met hoeveel verbindingslijnstukken is dit minimaal mogelijk?

191. Een stad bestaat uit congruente vierkante huizenblokken met straten ertussen. De breedte van de straten wordt verwaarloosd. Drie winkels bevinden zich op drie straathoeken, zoals in de linker figuur is aangegeven. Op een straathoek moet men een magazijn inrichten, van waaruit de winkels bevoorraad worden. Een economische eis is deze straathoek zo te kiezen, dat de som van de afstanden langs de straten gemeten van het magazijn tot de drie winkels, minimaal is. Waar kiest men het magazijn?

Zelfde vraag voor de rechter figuur, waarin vier winkels bevoorraad moeten worden.

Ten slotte wordt gevraagd het probleem algemeen op te lossen voor een willekeurig aantal winkels.



(Ontleend aan een voordracht van G. Hall in Knokke, 1967)

OPLOSSINGEN

187. Een tegelvloer is 8 tegels breed en x tegels lang. Een diagonaal heeft met het zevendedeel van de tegels een lijnstuk gemeen. Bereken x.

Het is duidelijk, dat $x = 7n$. De diagonaal zal 7 verticale en $7n - 1$ horizontale lijnen snijden. Zijn de snijpunten alle verschillend, dan loopt hij dus over $7 + 7n - 1 + 1$ tegels. Als de diagonaal door p hoekpunten gaat, wordt dit aantal gereduceerd tot $7 + 7n - p$.

Er zijn nu de volgende mogelijkheden:

n is deelbaar door 2, maar niet door 4, en $p = 1$,
n is deelbaar door 4, maar niet door 8, en $p = 3$,
n is deelbaar door 8 en $p = 7$,
n is niet deelbaar door 2 en $p = 0$.

Deze mogelijkheden leveren resp.

$$7 + 7n - 1 = 8n \text{ en dus } n = 6,$$
$$7 + 7n - 3 = 8n \text{ en dus } n = 4,$$
$$7 + 7n - 7 = 8n \text{ en dus } n = 0,$$
$$7 + 7n = 8n \text{ en dus } n = 7.$$

We vinden dus drie mogelijkheden, t.w. $n = 6$, $n = 4$, $n = 7$, en dus $x = 42$, $x = 28$, $x = 49$.

188. A neemt een getal van vier verschillende cijfers in gedachten; het mag met een 0 beginnen.

B raadt: 0123; A zegt: 1 goed 0 raak.
B raadt: 4567; A zegt: 1 goed 1 raak.

Dit betekent: van de cijfers 0, 1, 2, 3 komt er één in het getal van A voor en dit staat in 0123 niet op dezelfde plaats als in het getal van A. Van de cijfers 4, 5, 6, 7 komt er één voor in het getal van A en dit cijfer staat op de goede plaats.

B mag nog drie keer raden en moet dan het getal van A weten. Hoe gaat hij te werk?

1. B raadt: 4523. Al naar het antwoord, dat hij krijgt, weet hij nu:

één van de cijfers 4 en 5 is raak - of - één van de cijfers 6 en 7 is raak,
één van de cijfers 2 en 3 is goed (maar niet raak) - of - één van de cijfers 0 en 1 is goed.

Bovendien weet B nu, dat de cijfers 8 en 9 in het getal van A voorkomen.

Er zijn twee principieel verschillende gevallen:

a. 4 of 5 raak en 0 of 1 goed,
b. 4 of 5 raak en 2 of 3 goed.

We beschouwen eerst geval a.

2. B raadt: 4019. Is het antwoord 3 goed, dan was 4 raak, en is het antwoord 2 goed, dan was 5 raak.

Onderstel het antwoord is 3 goed 1 raak. Het getal van A kan dan geweest zijn:

4908 4980 4890 4981 4891.

B raadt 4908. De antwoorden, die hij in de vijf mogelijke gevallen krijgt, zijn alle verschillend. Hij kan dus het getal identificeren.

Onderstel het antwoord is 3 goed 2 raak. Het getal kan geweest zijn:

4098 4918 4809.

B raadt 4098 en identificeert het getal.

Antwoord 3 goed 3 raak. Het getal was 4089 of 4819. B raadt 4089.

Antwoord 2 goed 0 raak. Het getal kan geweest zijn

9508 9580 8590 1598 9581 8591.

B raadt 9581.

Antwoord 2 goed 1 raak. Het getal kan geweest zijn

9518 1589 8509.

B raadt 9518.

Antwoord 2 goed 2 raak. Het getal was 8519.

Geval b wordt op dezelfde manier behandeld als geval a, maar levert iets minder mogelijkheden. Het is daarom eenvoudiger. De lezer kan het zelf zonder moeite verder uitwerken.

Liefhebbers zouden nu kunnen nagaan, wat moet gebeuren, als de tweede informatie (bij 4567) geringer was geweest en het antwoord was geweest b.v. 1 goed 0 raak. Ik vermoed, dat dan zes keer raden steeds uitkomst kan bieden. En zo zou men verder kunnen gaan.